Polskie Towarzystwo Medycyny Nuklearnej

STATYSTYKA W ROZPADACH PROMIENIOTWÓRCZYCH

dr n. tech. Adam Bajera
Członek honorowy PTMN

TREŚĆ

FIZYCZNE CECHY ROZPADU PROMIENIOTWÓRCZEGO

ROZKŁADY STATYSTYCZNE ISTOTNE DLA ROZPADÓW PROMIENIOTWÓRCZYCH

Rozkład dwumianowy – Rozkład Poisson'a – Rozkład normalny

Fizyczne cechy rozpadu promieniotwórczego

1. Przemiana jądra izotopu ma charakter przypadkowy i nie podlega działaniu żadnych, znanych czynników zewnętrznych.
2. Na akt rozpadu dowolnego jądra izotopu nie mają wpływu rozpady innych jąder.
3. Produkty rozpadu mogą opuścić jądro izotopu w dowolnym, przypadkowym kierunku.

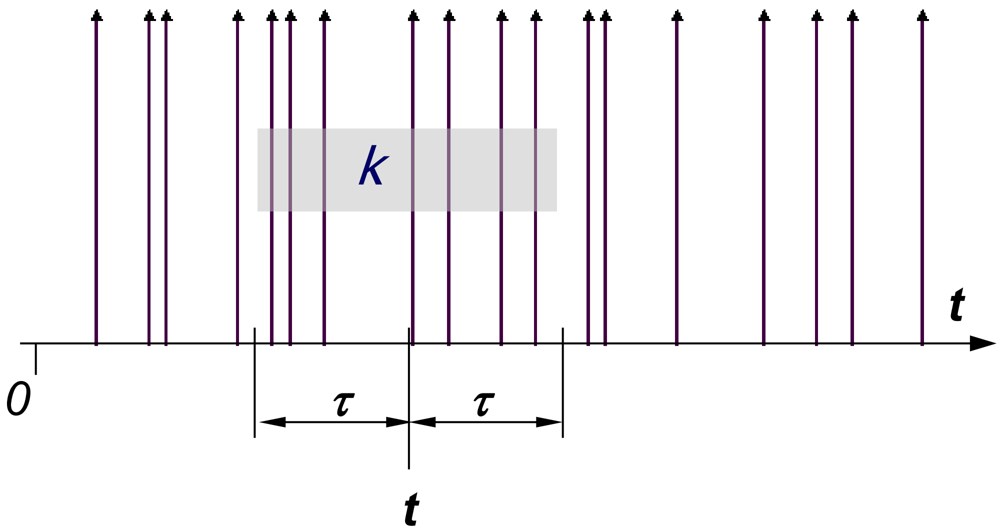
Fizyczne cechy rozpadu promieniotwórczego

Statystycznym pojęciem używanym do opisu losowej przemiany promieniotwórczej jednego z N jąder w chwili czasu t, jest gęstość prawdopodobieństwa jego rozpadu.

W praktyce można posługiwać się jedynie prawdopodobieństwem, że w przedziale czasu $t + \Delta t$ nastąpi $k = 1, 2, \ldots$ rozpadów wśród N niestabilnych jąder, o ile średnia częstość rozpadów jest $\lambda \cdot N$. Zależy więc ono od rodzaju izotopu i liczby jego niestabilnych jąder.

Ilustracja losowości rozpadów

rozpady promieniotwórcze kolejnych jąder



$$P_k[\underbrace{N(t=0)\,e^{-\lambda t}}_{\text{liczba pozostałych niestabilnych jąder}},\quad \underbrace{t-\tau \le t < t+\tau}_{\text{przedział czasu}}]=?$$

ROZKŁADY STATYSTYCZNE ISTOTNE DLA ROZPADÓW PROMIENIOTWÓRCZYCH

Rozkład dwumianowy

(Bernouliego)

Rozkład dwumianowy (*Bernouliego*)

Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie wynosi p, a porażki q=1–p. Liczba sukcesów k w serii n prób jest liczbą losową o tzw. rozkładzie dwumianowym.

$$P(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

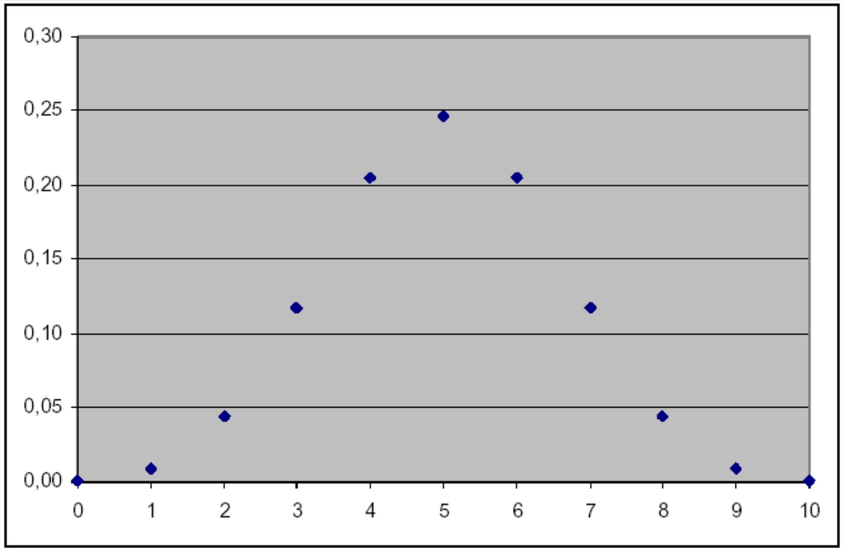
$$(k = 0,1,2,\ldots,n).$$

	Teoria prawdopodobieństwa	Rozpad promieniotwórczy
Rozkład:	$P(k,n,p)$	$P(k,N,\lambda)$
Wartość oczekiwana:	$\mu = n\,p$	$\boxed{\mu = N\,\lambda}$
Wariancja:	$\sigma^2 = n\,p(1-p)$	$\sigma^2 = N\lambda(1-\lambda)$

Można stosować dla dowolnych wartości p, n i k, lecz jest niewygodny dla obliczeń numerycznych.

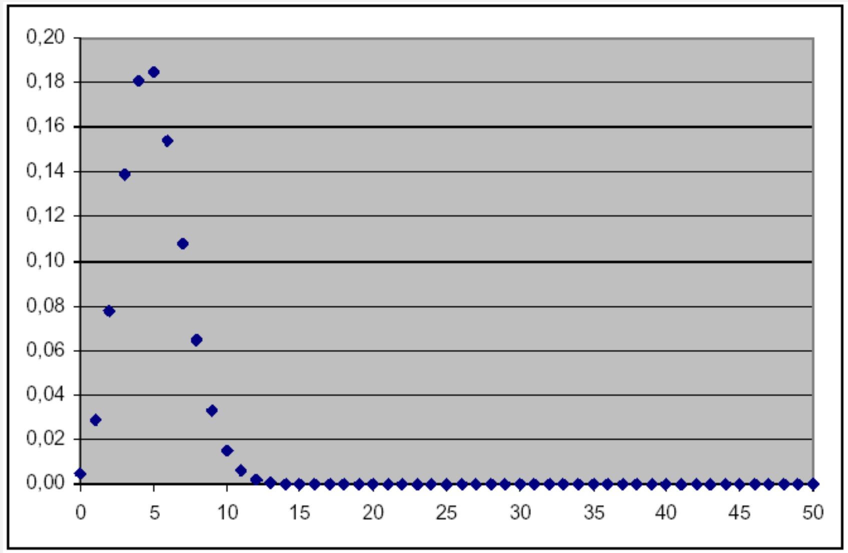
Przykłady rozkładu dwumianowego

$$P(k,n,p)=P(k,10,0.5)$$



k

$$P(k,n,p)=P(k,50,0.1)$$



k

Rozkład Poisson'a

Rozkład Poisson'a

Rozkład Poisson'a jest granicznym przypadkiem rozkładu dwumianowego przy spełnieniu warunków:

$$n \to \infty,\ p \to 0,\ \ \mu = np = const.$$

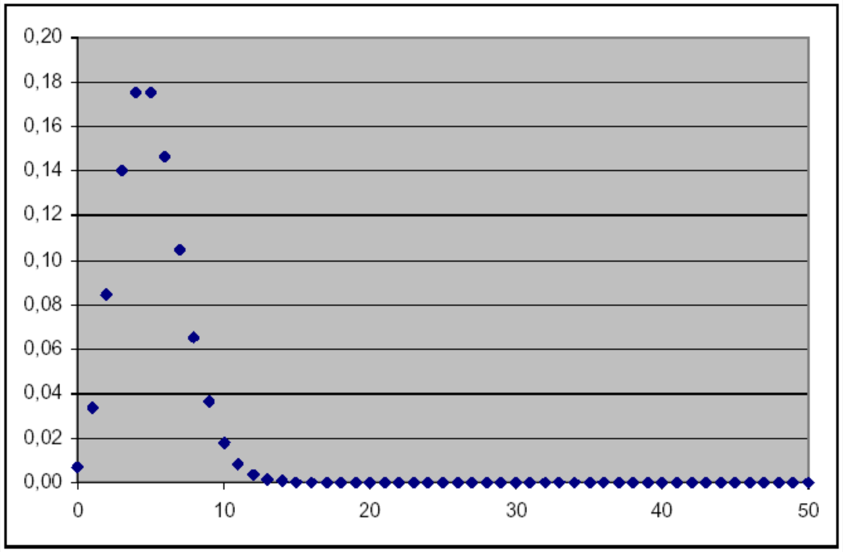
$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} P(k;n,p) = P(k;\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \qquad (k = 0,1,2,\dots,n).$$

	Teoria prawdopodobieństwa		Rozpad promieniotwórczy
Rozkład:	$P(k;\mu)$		$P(k;N\lambda) = P(k;A)$
Wartość oczekiwana:	$\mu = np$	$\Rightarrow$	$\boxed{\mu = N\lambda = A}$
Wariancja:	$\sigma^2 = np = \mu$		$\sigma^2 = N\lambda = A$

W praktyce, już dla *n* rzędu kilkudziesięciu oraz *k*<<*n*, można użyć rozkład Poissn'a w miejsce rozkładu dwumianowego.

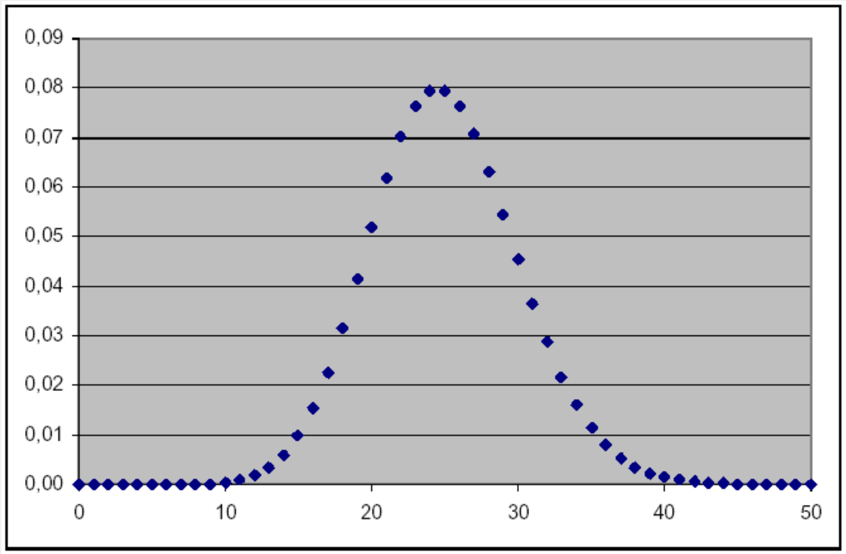
Przykłady rozkładu Poisson'a

$$P(k;\mu) = P(k;5)$$



k

$$P(k;\mu) = P(k;25)$$



k

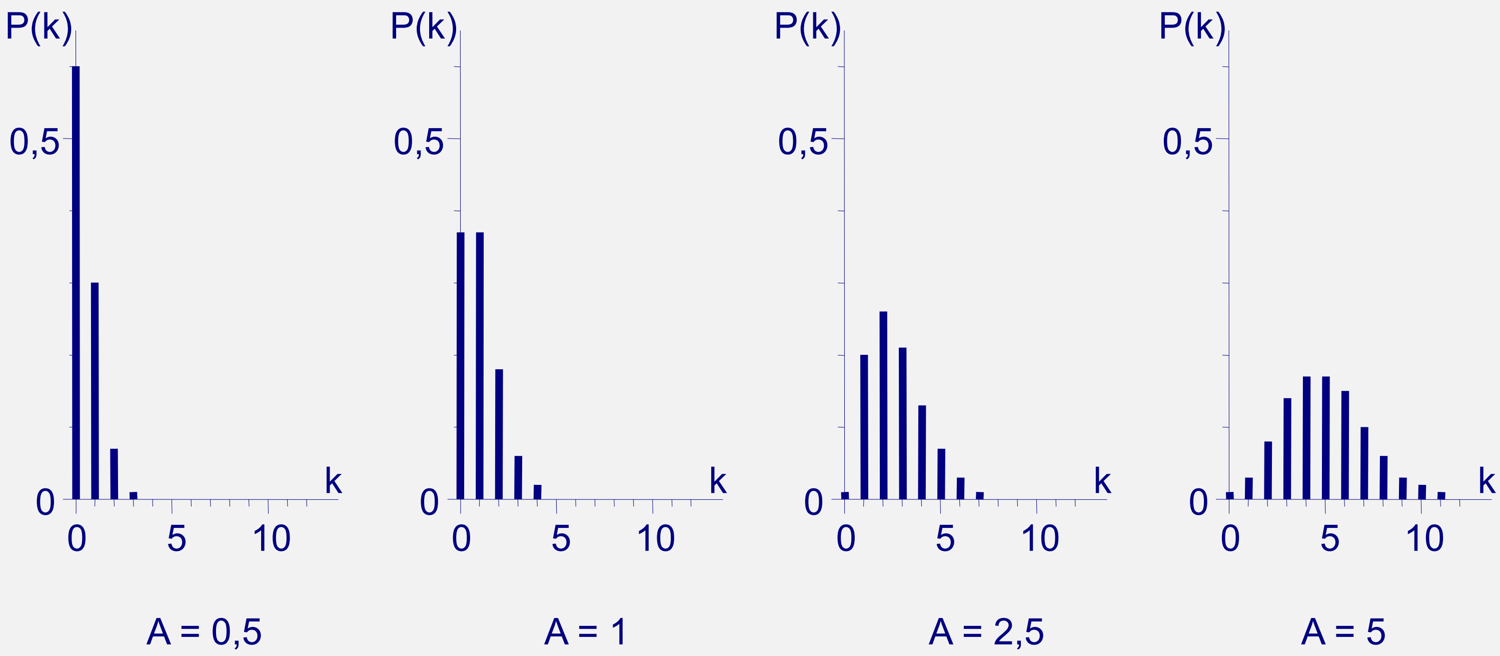
Rozkład Poisson'a

$$n \cdot p = N \cdot \lambda \;=\; A$$ ← **oczekiwana liczba rozpadów w jednostce czasu**

$$\boxed{P(k;A) = \frac{A^k}{k!} e^{-A} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).}$$

Prawdopodobieństwo k rozpadów niestabilnych jąder izotopu w jednostce czasu zależy od stałej rozpadu λ i liczby niestabilnych jąder izotopu N, a więc od aktywności rozpadu A.

Rozkład Poisson'a dla różnych oczekiwanych częstości rozpadów



Rozkład Poisson'a w MN

Rozkład Poisson'a można stosować przy dużej liczbie niezależnych prób (duże n), gdy łączna liczba zajść pewnego, rzadkiego (małe p) zdarzenia, jest mała (małe k).

Medycyna nuklearna posługuje się bilionami jąder izotopu (b. duże n), z których w każdej sekundzie ulegają rozpadowi najwyżej tysiące czy miliony jąder (małe k). Stałe rozpadu stosowanych izotopów są rzędu $10^{-3} \div 10^{-6}$ (małe p). Zatem warunki przybliżenia są spełnione.

Rozkład Poisson'a w MN

Rozkład Poisson'a jest podstawowym rozkładem stosowanym – szczególnie w diagnostyce – do :

- **analizy błędów pomiarowych,**
- **projektowania parametrów badania,**
- **oceny jakości badania i aparatury.**

Rozkład normalny

(Gauss'a)

Rozkład normalny (Gauss'a)

Dla dużych wartości oczekiwanych (praktycznie μ >20), rozkład Poisson'a zastęppuje się rozkładem normalnym:

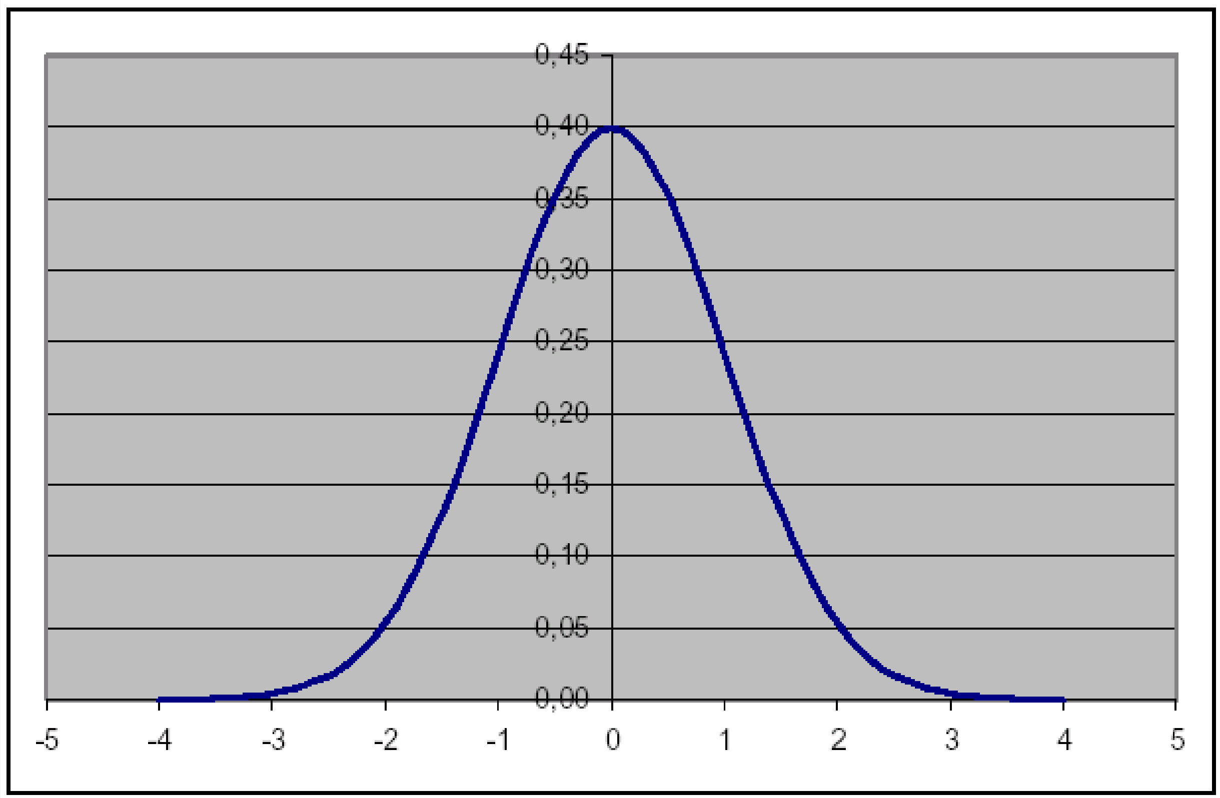
$$P(k,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

← Centralne Twierdzenie Graniczne

w którym $\mu = A$ **i** $\sigma^2 = A$

$$P(k;A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-\frac{(k-A)^2}{2A}} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n).$$

Przykład rozkładu normalnego



Rozkład Poissona szczególnym przypadkiem rozkładu normalnego

Rozkład Poisson'a jest podstawowym rozkładem stosowanym w medycynie nuklearnej do opisu rozpadów promieniotwórczych. Możliwość posłużenia się w jego miejsce rozkładem normalnym bardzo upraszcza i skraca obliczenia, gdyż zamiast każdorazowego obliczania wartości rozkładu Poisson'a można posłużyć się tabelaryzowanymi wartościami rozkładu normalnego.

Rozkład Poissona szczególnym przypadkiem rozkładu normalnego

Należy zwrócić szczególną uwagę, że z zasady rozkład normalny jest dwuparametrowy i wymaga podania wartości oczekiwanej i wariancji. W medycynie nuklearnej przyjmuje on szczególną, jednoparametrową formę – WARTOŚĆ OCZEKIWANA $E[X]$ **I WARIANCJA** $V[X]$ **SĄ SOBIE RÓWNE!!!**

$$E[X] = V[X] = \sigma_x^{\ 2}$$

Koniec tematu

Kompilacja - adam.bajera@euromail.pl